Florence Grandchamp
Drita Neziri
Abdelkader Amara
Raymond Thériault

ÉDITION
2019

REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE EN CONTEXTE FONDAMENTAL I

MAT SN 4273 2

FORMATION DE BASE DIVERSIFIÉE

POUR EN SAVOIR UN PEU PLUS

Vous trouverez des notions vous permettant d'en savoir un peu plus et de vous approprier les notions d'optimisation en contexte géométrique.

KINĒSIS ĒDUCATION

Polygones réguliers

■ DANS CETTE SECTION, VOUS DÉCOUVRIREZ LES POLYGONES RÉGULIERS ET LEURS PROPRIÉTÉS.

SM-2
SM-3

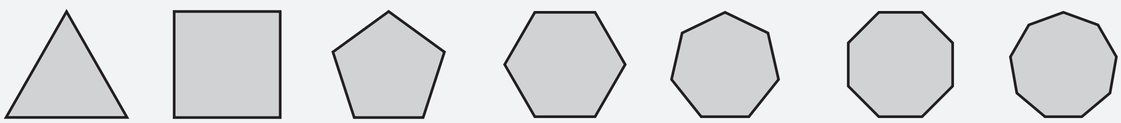
Outils mathématiques

Polygone régulier

Un ***polygone régulier*** est un polygone dont tous les côtés et tous les angles ont la même mesure.

Exemples

Voici une représentation de quelques-uns des polygones réguliers :



Triangle équilatéral	Carré	Pentagone régulier	Hexagone régulier	Heptagone régulier	Octogone régulier	Ennéagone régulier

Mesure d'un angle intérieur d'un polygone régulier

On calcule la mesure d'un angle intérieur d'un polygone régulier en appliquant la formule :

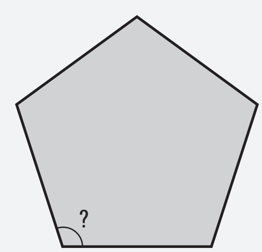
$$\textbf{Mesure d'un angle intérieur} = \frac{(n-2) \bullet 180°}{n}$$

où n est le nombre de côtés du polygone.

Exemple

Calculer la mesure d'un angle intérieur d'un pentagone régulier.

Un pentagone comporte 5 côtés. On substitue à n la valeur 5 dans la formule :



$$\text{Mesure d'un angle intérieur} = \frac{(n-2) \bullet 180°}{n}$$

$$\text{Mesure d'un angle intérieur} = \frac{(\mathbf{5}-2) \bullet 180°}{\mathbf{5}}$$

$$\text{Mesure d'un angle intérieur} = \frac{3 \bullet 180°}{5}$$

$$\text{Mesure d'un angle intérieur} = \mathbf{108°}$$

La mesure d'un angle intérieur d'un pentagone régulier est de **108°**.

- DANS CETTE SECTION, VOUS DÉCOUVRIREZ DES CRITÈRES POUR OPTIMISER L'AIRE D'UNE SURFACE PLANE.

SM-5

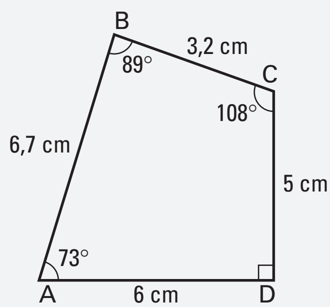
Outils mathématiques

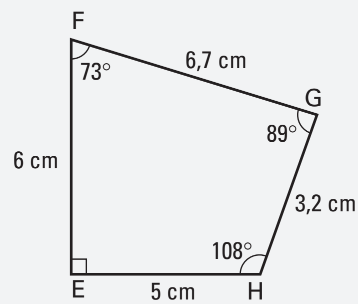
Polygones isométriques

Des ***polygones isométriques*** sont des polygones dont les **côtés homologues** et les **angles homologues** sont **de même mesure**.

Exemple

Les polygones illustrés ci-dessous sont isométriques.





En effet,

$m\angle A = m\angle F = 73°$
$m\angle B = m\angle G = 89°$
$m\angle C = m\angle H = 108°$
$m\angle D = m\angle E = 90°$

$m\,\overline{AB} = m\,\overline{FG} = 6{,}7\text{ cm}$
$m\,\overline{BC} = m\,\overline{GH} = 3{,}2\text{ cm}$
$m\,\overline{CD} = m\,\overline{HE} = 5\text{ cm}$
$m\,\overline{DA} = m\,\overline{EF} = 6\text{ cm}$

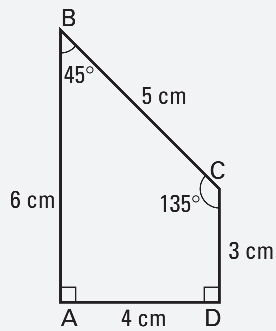
Outils mathématiques *suite*

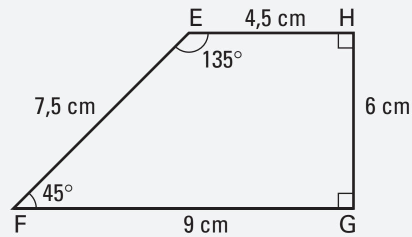
Polygones semblables

Des ***polygones semblables*** sont des polygones dont les **angles** homologues sont **isométriques** et dont les mesures des **côtés** homologues sont **proportionnelles**.

Exemple

Les polygones illustrés ci-dessous sont semblables, car les angles homologues sont isométriques et les mesures des côtés sont proportionnelles.





$m\angle A = m\angle G = \mathbf{90°}$
$m\angle B = m\angle F = \mathbf{45°}$
$m\angle C = m\angle E = \mathbf{135°}$
$m\angle D = m\angle H = \mathbf{90°}$

et

$$\frac{m\,\overline{FG}}{m\,\overline{AB}} = \frac{9\text{ cm}}{6\text{ cm}} = \mathbf{1{,}5}$$

$$\frac{m\,\overline{EF}}{m\,\overline{BC}} = \frac{7{,}5\text{ cm}}{5\text{ cm}} = \mathbf{1{,}5}$$

$$\frac{m\,\overline{EH}}{m\,\overline{CD}} = \frac{4{,}5\text{ cm}}{3\text{ cm}} = \mathbf{1{,}5}$$

$$\frac{m\,\overline{GH}}{m\,\overline{AD}} = \frac{6\text{ cm}}{4\text{ cm}} = \mathbf{1{,}5}$$

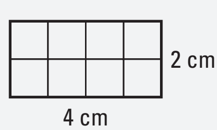
Le rapport de similitude des deux figures est $\mathbf{k = 1{,}5}$.

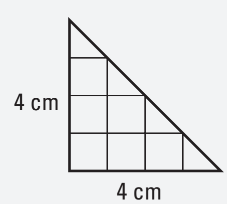
Polygones équivalents

Des ***polygones équivalents*** sont des polygones qui occupent la même aire.

Exemple

Les polygones illustrés ci-dessous sont équivalents.





En effet,

$A_{\text{rectangle}} = Ll$
$A_{\text{rectangle}} = 4 \times 2$
$A_{\text{rectangle}} = 8\text{ cm}^2$

et

$A_{\text{triangle}} = \dfrac{Bh}{2}$
$A_{\text{triangle}} = \dfrac{4 \times 4}{2}$
$A_{\text{triangle}} = 8\text{ cm}^2$

Outils mathématiques *suite*

Optimisation sur les polygones

Voici deux énoncés très utiles pour optimiser le périmètre d'un polygone.

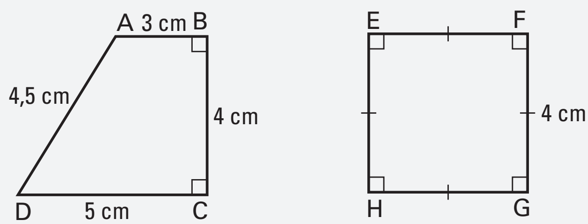
1er critère d'optimisation sur les polygones

Le premier critère d'optimisation sur les polygones nous indique le polygone équivalent à *n* côtés dont le périmètre est le plus petit.

> **Énoncé E17**
> De tous les polygones équivalents à *n* côtés, c'est le polygone régulier qui a le plus petit périmètre.

Exemple

Vérifier que les deux quadrilatères représentés ci-dessous sont équivalents et que le périmètre du carré est inférieur à celui du trapèze.



Les deux quadrilatères sont **équivalents**, car ils ont la **même aire** :

$$A_{\text{trapèze}} = \frac{(B + b)\,h}{2}$$
$$A_{\text{trapèze}} = \frac{(5 + 3) \bullet 4}{2}$$
$$A_{\text{trapèze}} = \mathbf{16\ cm^2}$$

$$A_{\text{carré}} = c^2$$
$$A_{\text{carré}} = 4^2$$
$$A_{\text{carré}} = \mathbf{16\ cm^2}$$

On vérifie que, des deux quadrilatères, c'est le carré qui a le plus petit périmètre :

$$P_{\text{trapèze}} = 3 + 4 + 5 + 4{,}5$$
$$P_{\text{trapèze}} = \mathbf{16{,}5\ cm}$$

$$P_{\text{carré}} = 4 \bullet 4$$
$$P_{\text{carré}} = \mathbf{16\ cm}$$

2e critère d'optimisation sur les polygones

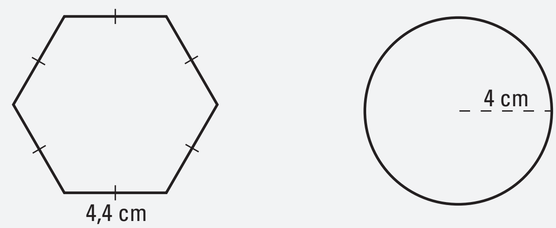
Le second critère d'optimisation sur les polygones nous indique le polygone convexe équivalent dont le périmètre est le plus petit.

> **Énoncé E18**
> De deux polygones convexes équivalents, c'est le polygone qui a le plus de côtés qui a le plus petit périmètre. (À la limite, c'est le cercle équivalent qui a le plus petit périmètre.)

Outils mathématiques *suite*

Exemple

L'hexagone et le cercle représentés ci-dessous sont équivalents. Tous deux ont, à l'entier près, une aire de 50 cm^2.



On vérifie que la circonférence du cercle est inférieure au périmètre de l'hexagone :

$P_{\text{hexagone}} = 6 \bullet 4{,}4$ $\qquad$ $C = 2\pi r$

$P_{\text{hexagone}} = \mathbf{26{,}4\ cm}$ $\qquad$ $C = \mathbf{25{,}12\ cm}$

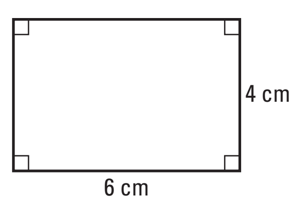
Note : Dans le *MAT 4273*, nous utiliserons 3,14 comme approximation de la valeur de π. Certains résultats peuvent varier si on utilise une approximation plus précise.

Si on appliquait cette théorie?

- LES EXEMPLES SUIVANTS VOUS PERMETTRONT D'OPTIMISER DES MESURES DANS DES POLYGONES.

Exemple 1

On considère le rectangle représenté ci-contre :



Déterminer les dimensions du quadrilatère équivalent à ce rectangle, dont le périmètre est le plus petit.

Solution

On calcule d'abord l'aire du rectangle ABCD :

$$A_{\text{rectangle}} = L \bullet l$$
$$A_{\text{rectangle}} = 6 \bullet 4$$
$$A_{\text{rectangle}} = 24\ cm^2$$

Selon l'énoncé E17, le quadrilatère de 24 cm² dont le périmètre est le plus petit est le quadrilatère régulier, donc un **carré**. On détermine la mesure de son côté :

$$\begin{aligned} A_{\text{carré}} &= c^2 \\ 24 &= c^2 \\ c &= \sqrt{24} \\ c &\approx 4{,}9 \end{aligned}$$

Le quadrilatère équivalent au rectangle ABCD dont le périmètre est le plus petit est un **carré** de **4,9 cm** de côté.

Exemple 2

Déterminer les dimensions de la figure plane de 100 cm², dont le périmètre est le plus petit.

Solution

Selon l'énoncé E18, la figure plane recherchée est un **cercle** dont l'**aire** est de **100 cm²**. On calcule le rayon du cercle :

$$\begin{aligned} A &= \pi r^2 \\ \boxed{} &= 3{,}14r^2 \\ r^2 &= \frac{100}{3{,}14} \\ r^2 &\approx 31{,}85 \\ r &= \sqrt{31{,}85} \\ r &\approx \boxed{} \end{aligned}$$

La figure plane de 100 cm², dont le périmètre est le plus petit, est un **cercle de 5,6 cm de rayon**.

Voici quelques Activités d'apprentissage pour vous exercer à optimiser des situations en contexte géométrique.

1. Déterminer les mesures demandées.

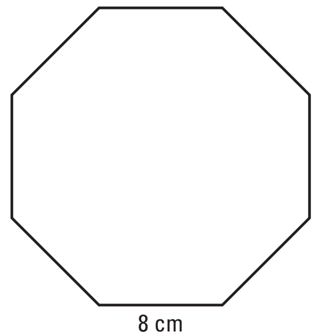
a) Un triangle est équivalent à un rectangle de 5 cm par 7 cm. Déterminer la mesure de la base du triangle, sachant que sa hauteur est de 8 cm.

b) Déterminer les dimensions du quadrilatère qui a la même aire qu'un rectangle de 20 m par 50 m, et dont le périmètre est le plus petit.

c) Quelle est la mesure du côté d'un carré équivalent à un disque de 12 cm de rayon ?

d) Déterminer les dimensions de la figure plane équivalente à un pentagone régulier de 8 cm de côté dont le périmètre est minimal.

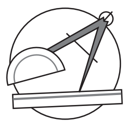
e) Un carré est équivalent à l'octogone régulier représenté ci-dessous.



Vérifier que l'énoncé E18 s'applique, c'est-à-dire que l'octogone a un périmètre inférieur à celui du carré.

Solides isométriques, semblables, équivalents

■ DANS CETTE SECTION, VOUS DÉCOUVRIREZ DES CRITÈRES POUR OPTIMISER L'AIRE D'UNE SURFACE PLANE.



SM-5

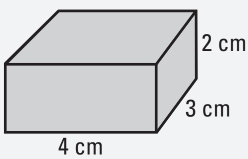
Outils mathématiques

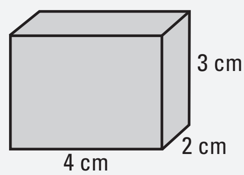
Solides isométriques

Des ***solides isométriques*** sont des solides dont toutes les **dimensions** sont **identiques**.

Exemple

Les solides représentés ci-dessous sont isométriques.



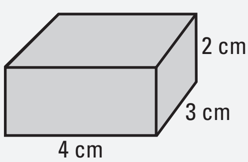


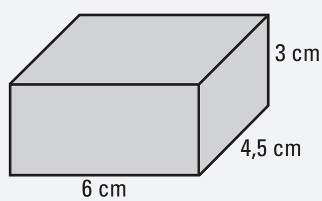
Solides semblables

Des ***solides semblables*** sont des solides dont les **mesures des côtés** sont **proportionnelles**.

Exemple

Les prismes représentés ci-dessous sont semblables :





On vérifie que les mesures des côtés sont effectivement proportionnelles. On calcule k, le **rapport de similitude** des solides :

$$k = \frac{6}{4} = \frac{4,5}{3} = \frac{3}{2}$$

$$k = \mathbf{1,5}$$

Outils mathématiques *suite*

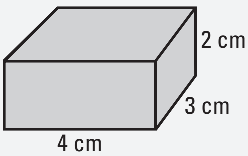
Aire des solides semblables

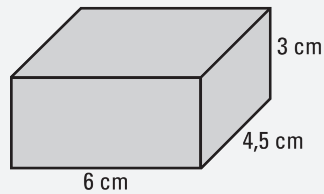
Le **rapport des aires** de solides semblables est égal au **carré du rapport de similitude** :

$$\frac{A_1}{A_2} = k^2$$

Exemple

Revenons aux solides de l'exemple précédent :





On calcule l'aire totale de chacun des prismes :

$A_t = 2\,(Ll + Lh + lh)$
$A_t = 2\,(4 \bullet 3 + 4 \bullet 2 + 3 \bullet 2)$
$A_t = 2\,(12 + 8 + 6)$
$A_t = 2 \bullet 26$
$A_t = 52\text{ cm}^2$

$A_t = 2\,(Ll + Lh + lh)$
$A_t = 2\,(6 \bullet 4{,}5 + 6 \bullet 3 + 4{,}5 \bullet 3)$
$A_t = 2\,(27 + 18 + 13{,}5)$
$A_t = 2 \bullet 58{,}5$
$A_t = 117\text{ cm}^2$

Le **rapport des aires totales** de ces solides semblables est de : $\frac{A_1}{A_2} = \frac{117\text{ cm}^2}{52\text{ cm}^2} = \mathbf{2{,}25 = 1{,}5^2}$.

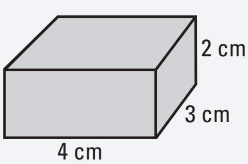
Volume de solides semblables

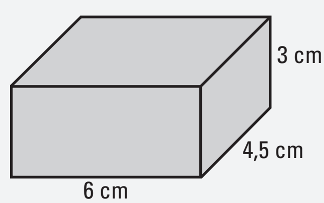
Le **rapport des volumes** de solides semblables est égal au **cube du rapport de similitude** :

$$\frac{V_1}{V_2} = k^3$$

Exemple

Reprenons les solides des deux exemples précédents :





On calcule le volume de chacun des prismes :

$V = Llh$
$V = 4 \bullet 3 \bullet 2$
$V = 24\text{ cm}^3$

$V = Llh$
$V = 6 \bullet 4{,}5 \bullet 3$
$V = 81\text{ cm}^3$

Le **rapport des volumes** de ces prismes semblables est : $\frac{V_1}{V_2} = \frac{81\text{ cm}^3}{24\text{ cm}^3} = \mathbf{3{,}375 = 1{,}5^3}$.

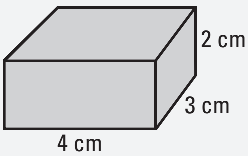
Outils mathématiques *suite*

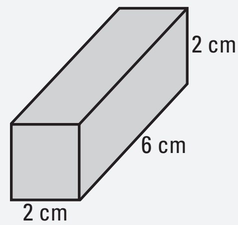
Solides équivalents

Des ***solides équivalents*** sont des solides de même volume.

Exemple

Les solides représentés ci-dessous sont équivalents :





En effet, les deux solides occupent un même volume :

$V = Llh$
$V = 4 \bullet 3 \bullet 2$
$\boldsymbol{V = 24\ \mathrm{cm}^3}$

$V = Llh$
$V = 2 \bullet 6 \bullet 2$
$\boldsymbol{V = 24\ \mathrm{cm}^3}$

Optimisation sur les solides

Tout comme dans les figures planes, il existe des critères d'optimisation dans les solides.

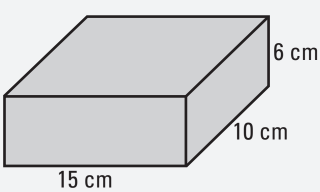
Premier critère d'optimisation sur les solides

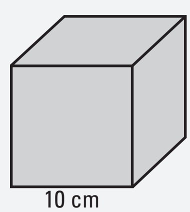
Le premier critère d'optimisation des solides concerne le volume des prismes rectangulaires de même aire totale.

> **Énoncé E19**
> De tous les prismes rectangulaires de même aire totale, c'est le cube qui a le plus grand volume.

Exemple

On considère le prisme rectangulaire et le cube représentés ci-dessous :





$A_t = 2 \bullet (15 \times 10 + 15 \times 6 + 10 \times 6)$
$A_t = 600\ \mathrm{cm}^2$

$A_t = 6 \times 10^2$
$A_t = 600\ \mathrm{cm}^2$

On vérifie que, des deux prismes, c'est le cube qui a le plus grand volume :

$V = Llh$
$V = 15 \times 10 \times 6$
$\boldsymbol{V = 900\ \mathrm{cm}^3}$

$V = c^3$
$V = 10^3$
$\boldsymbol{V = 1\,000\ \mathrm{cm}^3}$

Le volume du cube est supérieur au volume du prisme, car **$1\,000\ \mathrm{cm}^3 > 900\ \mathrm{cm}^3$**.

Outils mathématiques *suite*

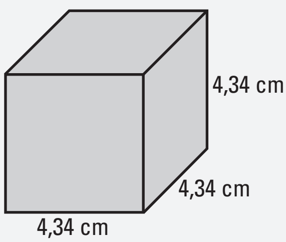
Deuxième critère d'optimisation sur les solides

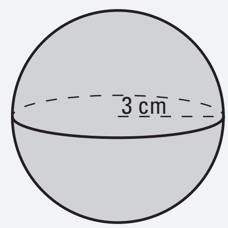
Le deuxième critère d'optimisation des solides permet de comparer le volume des solides de même aire totale.

> **Énoncé E20**
> De tous les solides de même aire totale, c'est la boule qui a le plus grand volume.

Exemple

Le cube et la boule représentés ci-dessous ont la même aire totale : tous deux ont une aire totale de 113 cm^2 :





On vérifie que le volume de la boule est supérieur au volume du cube :

$V = c^3$

$V = 4{,}34^3$

$\mathbf{V \approx 81{,}7\ cm^3}$

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

$$V = \frac{4 \bullet 3{,}14 \bullet 3^3}{3}$$

$\mathbf{V = 113\ cm^3}$

Le volume de la boule est effectivement supérieur au volume du cube, car 113 $cm^3 >$ 81,7 cm^3.

Troisième critère d'optimisation sur les solides

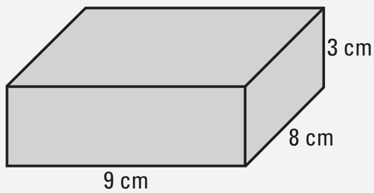
Le troisième critère d'optimisation des solides permet de comparer l'aire totale de prismes rectangulaires de même volume.

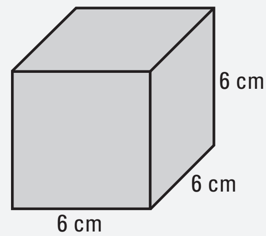
> **Énoncé E21**
> De tous les prismes rectangulaires de même volume, c'est le cube qui a la plus petite aire totale.

Outils mathématiques *suite*

Exemple

Le prisme rectangulaire et le cube représentés ci-dessous sont équivalents : tous deux ont un volume de 216 cm^3 :





$A_t = 2\ (Ll + Lh + lh)$
$A_t = 2\ (9 \bullet 8 + 9 \bullet 3 + 8 \bullet 3)$
$\mathbf{A_t = 246\ cm^2}$

$A_t = 6a^2$
$A_t = 6 \bullet 6^2$
$\mathbf{A_t = 216\ cm^2}$

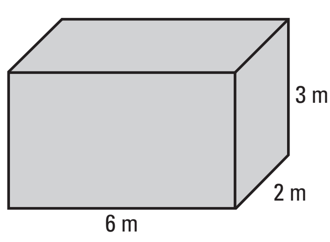
Le **cube** a effectivement une **aire totale inférieure** à celle du **prisme**.

Si on appliquait cette théorie?

- LES EXEMPLES SUIVANTS VOUS PERMETTRONT DE DÉTERMINER DES MESURES DANS DES SOLIDES DANS UN CONTEXTE D'OPTIMISATION.

Exemple 1

On considère le prisme rectangulaire représenté ci-dessous :



a) **Déterminer les dimensions du plus gros prisme rectangulaire qui a la même aire totale que ce prisme.**

b) **Déterminer les dimensions du plus gros solide qui a la même aire totale que ce prisme.**

Solution

a) **Les dimensions du plus gros prisme rectangulaire de même aire totale que le prisme**

Rappelons la formule permettant de calculer l'aire totale d'un prisme rectangulaire : $A_t = 2\ (Ll + Lh + lh)$.

$$A_t = 2\ (Ll + Lh + lh)$$
$$A_t = 2\ (6 \bullet 2 + 6 \bullet 3 + 2 \bullet 3)$$
$$A_t = 2\ (12 + 18 + 6)$$
$$A_t = 2 \bullet 36$$
$$A_t = \mathbf{72\ cm^2}$$

Selon l'énoncé E19, de tous les prismes rectangulaires de même aire totale, c'est le **cube** qui a le plus grand volume. On cherche donc la mesure de l'arête du cube dont l'aire totale est de **72 cm²**. Rappelons la formule pour calculer l'aire totale du cube : $A_t = 6a^2$.

$$A_t = 6a^2$$
$$\mathbf{72} = 6a^2$$
$$a^2 = \frac{72}{6}$$
$$a^2 = 12$$
$$a = \sqrt{12}$$
$$a \approx \mathbf{3{,}46\ cm}$$

Le plus gros prisme rectangulaire de même aire totale que le prisme donné est donc un **cube** de **3,46 cm** d'arête.

b) **Les dimensions du plus gros solide de même aire totale que le prisme**

Selon l'énoncé E20, le solide le plus gros qui a la même aire totale que le prisme est la boule. On doit donc calculer le rayon d'une sphère dont l'aire totale est de 72 cm^2 :

$$A_t = 4\pi r^2$$
$$72 = 4 \bullet 3{,}14 \bullet r^2$$
$$72 = 12{,}56\ r^2$$
$$r^2 = \frac{72}{12{,}56}$$
$$r^2 \approx 5{,}73$$
$$r = \sqrt{5{,}73}$$
$$\boldsymbol{r} \approx \mathbf{2{,}4\ cm}$$

Le plus gros solide dont l'aire totale est la même que celle du prisme est une **sphère de 2,4 cm de rayon**. Vérifions que le volume de la sphère est supérieur au volume du prisme.

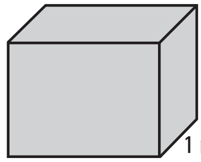
$$V_{\text{sphère}} = \frac{4\pi r^3}{3}$$
$$V_{\text{sphère}} = \frac{4 \times 3{,}14 \times 2{,}4^3}{3}$$
$$V_{\text{sphère}} \approx 57{,}9\ \text{cm}^3$$

$$V_{\text{prisme}} = Llh$$
$$V_{\text{prisme}} = 6 \times 3 \times 2$$
$$V_{\text{prisme}} = 36\ \text{cm}^3$$

Le volume de la sphère est effectivement supérieur à celui du prisme, car 57,9 cm^3 > 36 cm^3.

Exemple 2

On considère le prisme rectangulaire représenté ci-dessous :



Déterminer les dimensions du prisme rectangulaire équivalent qui possède la plus petite aire totale.

Solution

On applique l'énoncé E21, de tous les prismes rectangulaires de même volume, c'est le cube qui a la plus petite aire totale.

On calcule d'abord le volume du prisme :

$$V = Llh$$

$$V = 2 \bullet 1 \bullet \boxed{}$$

$$V = \boxed{}\ \text{m}^3$$

Le cube recherché doit avoir un volume de **3 m³**, ce qui nous permet de calculer la mesure de son arête :

$$V = a^3$$

$$\boxed{} = a^3$$

$$a = \sqrt[3]{3}$$

$$a \approx \boxed{}\ \text{m}$$

Le prisme rectangulaire, de plus petite aire totale, qui occupe le même volume que le prisme donné est donc un **cube de 1,44 m d'arête**.

On vérifie que l'aire totale du cube est inférieure à l'aire totale du prisme donné :

Aire totale du cube :

$A_t = 6 \bullet a^2$

$A_t = 6 \bullet 1{,}44^2$

$A_t \approx \boxed{}\ \text{m}^2$

Pour le prisme :

$A_t = 2\ (Ll + Lh + lh)$

$A_t = 2\ (2 \bullet 1 + 2 \bullet 1{,}5 + 1 \bullet 1{,}5)$

$A_t = \boxed{}\ \text{m}^2$

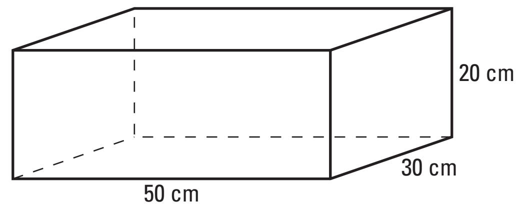
On constate que l'aire du cube est inférieure à l'aire totale du prisme, car **12,44 m²** < **13 m²**.

Poursuivez sur votre lancée avec les Activités d'apprentissage que voici.

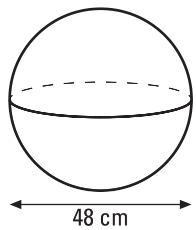
2. Déterminer les mesures demandées.

a) Un cube de 20 cm d'arête est équivalent à un prisme à base carrée de 25 cm de hauteur. Lequel de ces deux solides a la plus grande aire totale, et de combien ?

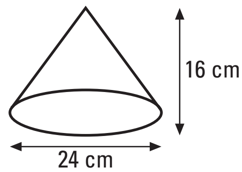
b) Quelles sont les dimensions du prisme rectangulaire de même volume que celui qui est représenté ci-dessous, et dont l'aire totale est minimale ? Quel est l'écart entre les aires totales des deux prismes ?



c) Un cube a la même aire totale que la sphère représentée ci-dessous. Déterminer lequel des deux solides a le plus grand volume. De combien ce volume surpasse-t-il celui de l'autre solide ?



d) Quelles sont les dimensions du plus gros solide de même aire totale que le cône représenté ci-dessous ?



Figures planes isométriques, semblables, équivalentes

1. a) Aire du rectangle :

$A_{\text{rectangle}} = Ll$
$A_{\text{rectangle}} = 5 \bullet 7$
$A_{\text{rectangle}} = 35 \text{ cm}^2$

Les deux polygones sont équivalents. L'aire du triangle est donc de 35 cm^2.

$A_{\text{triangle}} = \dfrac{\text{base} \bullet \text{hauteur}}{2}$

$35 = \dfrac{b \bullet 8}{2}$

$35 = 4b$

$b = \dfrac{35}{4}$

$b = 8{,}75 \text{ cm}$

La base du triangle est de 8,75 cm.

b) Selon l'énoncé E17, de tous les quadrilatères équivalents, c'est le polygone régulier, c'est-à-dire le carré, qui a le plus petit périmètre :

Aire du rectangle :

$A_{\text{rectangle}} = Ll$
$A_{\text{rectangle}} = 20 \bullet 50$
$A_{\text{rectangle}} = 1\,000 \text{ m}^2$

Mesure du côté du carré :

$A = c^2$
$1\,000 = c^2$
$c = \sqrt{1\,000}$
$c \approx 31{,}62 \text{ m}$

Le quadrilatère équivalent au rectangle dont le périmètre est le plus petit est un carré de 31,62 m de côté.

c) $A_{\text{disque}} = A_{\text{carré}}$

$\pi r^2 = c^2$

$3{,}14 \bullet 12^2 = c^2$

$452{,}16 = c^2$

$c = \sqrt{452{,}16}$

$c \approx 21{,}26 \text{ cm}$

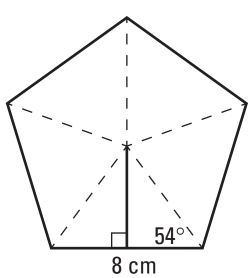
La mesure du côté du carré est de 21,26 cm.

d) Selon l'énoncé E18, la figure plane équivalente au pentagone, dont le périmètre est minimal, est un cercle.

Mesure d'un angle intérieur d'un pentagone régulier :

Mesure d'un angle intérieur $= \dfrac{(5-2) \bullet 180°}{5} = 108°$

On partage le pentagone régulier de 8 cm de côté en cinq triangles :



On détermine la hauteur de l'un de ces triangles :

$\tan 54° = \dfrac{\text{mesure du côté opposé}}{\text{mesure du côté adjacent}}$

$1{,}376\,4 = \dfrac{x}{4}$

$x = 4 \bullet 1{,}376\,4$

$x \approx 5{,}51 \text{ cm}$

1. d) Aire d'un triangle :

$A = \dfrac{\text{base} \bullet \text{hauteur}}{2}$

$A = \dfrac{8 \bullet 5,51}{2}$

$A = 22,04\ \text{cm}^2$

Aire du pentagone : $5 \bullet 22,04\ \text{cm}^2 = 110,2\ \text{cm}^2$

Mesure du rayon du cercle équivalent au pentagone :

$A_{\text{pentagone}} = A_{\text{cercle}}$

$110,2 = \pi r^2$

$r^2 = \dfrac{110,2}{3,14}$

$r^2 \approx 35,1$

$r = \sqrt{35,1}$

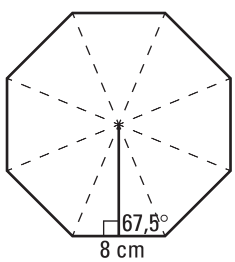
$r \approx 5,9\ \text{cm}$

La figure plane équivalente au pentagone, dont le périmètre est minimal, est un cercle de 5,9 cm de rayon.

e) Mesure d'un angle intérieur de l'octogone régulier :

Mesure d'un angle intérieur $= \dfrac{(8 - 2) \bullet 180°}{8} = 135°$

On peut décomposer l'octogone en huit triangles isocèles, comme ci-dessous :



Hauteur d'un triangle :

$\tan 67,5° = \dfrac{\text{mesure du côté opposé}}{\text{mesure du côté adjacent}}$

$2,414\ 2 = \dfrac{x}{4}$

$x = 4 \bullet 2,414\ 2$

$x \approx 9,66\ \text{cm}$

Aire d'un triangle :

$A = \dfrac{\text{base} \bullet \text{hauteur}}{2}$

$A = \dfrac{8 \bullet 9,66}{2}$

$A = 38,64\ \text{cm}^2$

Aire de l'octogone régulier : $8 \bullet 38,64\ \text{cm}^2 = 309,12\ \text{cm}^2$

L'octogone et le carré sont équivalents :

$A_{\text{octogone}} = A_{\text{carré}}$

$309,12 = c^2$

$c = \sqrt{309,12}$

$c \approx 17,58\ \text{cm}$

Périmètre de l'octogone : $8 \bullet 8 = 64\ \text{cm}$

Périmètre du carré : $4 \bullet 17,58 = 70,32\ \text{cm}$

Le périmètre de l'octogone est inférieur à celui du carré, car 64 cm < 70,32 cm.

Solides isométriques, semblables, équivalents

2. a) Par l'énoncé E21, le prisme rectangulaire a la plus grande aire totale.
Volume du cube:
$V = a^3$
$V = 20^3$
$V = 8\ 000\ \text{cm}^3$

Côté de la base du prisme:
$V = Llh$
$8\ 000 = x^2 \bullet 25$
$\frac{8\ 000}{25} = x^2$
$320 = x^2$
$x = \sqrt{320}$
$x \approx 17{,}89\ \text{cm}$

Aire totale du cube:
$A_t = 6a^2$
$A_t = 6 \times 20^2$
$A_t = 2\ 400\ \text{cm}^2$

Aire totale du prisme:
$A_t = 2\ (Ll + Lh + lh)$
$A_t = 2\ (17{,}89 \times 17{,}89 + 17{,}89 \times 25 + 17{,}89 \times 25)$
$A_t = 2 \times 1\ 214{,}552\ 1$
$A_t = 2\ 429{,}10\ \text{cm}^2$

Écart entre l'aire totale du prisme et l'aire totale du cube:
$2\ 429{,}10\ \text{cm}^2 - 2\ 400\ \text{cm}^2 = 29{,}10\ \text{cm}^2$
Le prisme a la plus grande aire totale, avec une différence de 29,10 cm².

b) Selon l'énoncé E21, le prisme recherché est un cube.
Volume du prisme:
$V = Llh$
$V = 50 \bullet 30 \bullet 20$
$V = 30\ 000\ \text{cm}^3$

Arête du cube:
$V = a^3$
$30\ 000 = a^3$
$a = \sqrt[3]{30\ 000}$
$a \approx 31{,}07\ \text{cm}$

Aire totale du prisme:
$A_t = 2\ (Ll + Lh + lh)$
$A_t = 2\ (50 \bullet 30 + 50 \bullet 20 + 30 \bullet 20)$
$A_t = 2\ (1\ 500 + 1\ 000 + 600)$
$A_t = 6\ 200\ \text{cm}^2$

Aire totale du cube:
$A_t = 6a^2$
$A_t = 6 \bullet 31{,}07^2$
$A_t \approx 5\ 792{,}07\ \text{cm}^2$

Écart: $6\ 200\ \text{cm}^2 - 5\ 792{,}07\ \text{cm}^2 = 407{,}93\ \text{cm}^2$
L'aire totale du cube est inférieure à celle du prisme de 407,93 cm².

2. c) (Exemple de solution)
Selon l'énoncé E20, c'est la sphère qui a le plus grand volume.
Aire totale de la sphère :
$A_t = 4\pi r^2$
$A_t = 4 \bullet 3{,}14 \bullet 24^2$
$A_t = 7\ 234{,}56\ \text{cm}^2$

Arête du cube :
$A_t = 6a^2$
$7\ 234{,}56 = 6a^2$
$a^2 = \dfrac{7\ 234{,}56}{6}$
$a^2 = 1\ 205{,}76$
$a = \sqrt{1\ 205{,}76}$
$a \approx 34{,}72\ \text{cm}$

Volume du cube :
$V = a^3$
$V = 34{,}72^3$
$V \approx 41\ 854{,}21\ \text{cm}^3$

Volume de la sphère :
$V = \dfrac{4\pi r^3}{3}$
$V = \dfrac{4 \bullet 3{,}14 \bullet 24^3}{3}$
$V = 57\ 876{,}48\ \text{cm}^3$

Écart : $57\ 876{,}48\ \text{cm}^3 - 41\ 854{,}21\ \text{cm}^3 = 16\ 022{,}27\ \text{cm}^3$
Le volume de la sphère dépasse celui du cube de 16 022,27 cm³.

d) (Exemple de solution)
Selon l'énoncé E20, le solide recherché est une sphère.
Apothème du cône (par la relation de Pythagore) :
$a^2 + b^2 = c^2$
$12^2 + 16^2 = c^2$
$144 + 256 = c^2$
$400 = c^2$
$c = \sqrt{400}$
$c = 20\ \text{cm}$
La mesure de l'apothème du cône est de 20 cm.

Aire totale du cône :
$A_t = \pi r\,(a + r)$
$A_t = 3{,}14 \bullet 12\ (20 + 12)$
$A_t = 1\ 205{,}76\ \text{cm}^2$
L'aire totale du cône est de 1 205,76 cm².

Rayon de la sphère :
$A_t = 4\pi r^2$
$1\ 205{,}76 = 4 \bullet 3{,}14 \bullet r^2$
$1\ 205{,}76 = 12{,}56r^2$
$r^2 = \dfrac{1\ 205{,}76}{12{,}56}$
$r^2 = 96$
$r = \sqrt{96}$
$r \approx 9{,}8\ \text{cm}$
Le plus gros solide de même aire totale que le cône est une sphère de 9,8 cm de rayon.

Liste des énoncés du cours MAT 4273

L'élève doit maîtriser les énoncés prescrits qui suivent. Ils peuvent être utilisés dans une preuve ou une démonstration.

E1. Deux triangles qui ont tous leurs côtés homologues isométriques sont isométriques.

E2. Deux triangles qui ont un angle isométrique compris entre des côtés homologues isométriques sont isométriques.

E3. Deux triangles qui ont un côté isométrique compris entre des angles homologues isométriques sont isométriques.

E4. Des figures planes sont isométriques si et seulement si tous leurs côtés et tous leurs angles homologues sont isométriques.

E5. Deux triangles qui ont deux angles homologues isométriques sont semblables.

E6. Deux triangles dont les mesures des côtés homologues sont proportionnelles sont semblables.

E7. Deux triangles possédant un angle isométrique compris entre des côtés homologues de longueurs proportionnelles sont semblables.

E8. Des sécantes coupées par des parallèles sont partagées en segments de longueurs proportionnelles.

E9. Le milieu de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est équidistant des trois sommets.

E10. Les côtés d'un triangle sont proportionnels au sinus des angles opposés.

E11. Le segment joignant les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté et sa mesure égale la moitié de celle du troisième côté.

E12. Dans un triangle rectangle, la mesure de chaque côté de l'angle droit est moyenne proportionnelle entre la mesure de sa projection sur l'hypoténuse et celle de l'hypoténuse entière.

E13. Dans un triangle rectangle, la mesure de la hauteur issue du sommet de l'angle droit est moyenne proportionnelle entre les mesures des deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.

E14. Dans un triangle rectangle, le produit des mesures de l'hypoténuse et de la hauteur correspondante égale le produit des mesures des côtés de l'angle droit.

E15. Le carré de la longueur d'un côté d'un triangle quelconque est égal à la somme des carrés des longueurs des autres côtés, moins le double du produit des longueurs des autres côtés par le cosinus de l'angle compris entre ces deux côtés.

E16. Le segment joignant les milieux des côtés non parallèles d'un trapèze est parallèle aux bases et sa mesure égale la demi-somme des mesures des bases.

E17. De tous les polygones équivalents à *n* côtés, c'est le polygone régulier qui a le plus petit périmètre.

E18. De deux polygones réguliers convexes équivalents, c'est le polygone qui a le plus de côtés qui a le plus petit périmètre. (À la limite, c'est le cercle équivalent qui a le plus petit périmètre.)

E19. De tous les prismes rectangulaires de même aire totale, c'est le cube qui a le plus grand volume.

E20. De tous les solides de même aire totale, c'est la boule qui a le plus grand volume.

E21. De tous les prismes rectangulaires de même volume, c'est le cube qui a la plus petite aire totale.

L'ensemble des titres admissibles de notre production bénéficie du soutien financier du gouvernement du Canada.

Dépôt légal — Bibliothèque et Archives nationales du Québec, Bibliothèque et Archives Canada, 2022.
ISBN 978-2-7615-0952-7

ISBN 978-2-7615-0952-7

9 782761 509527

KINĒSIS ĒDUCATION

400 7969